Durée : 4 heures
Option scientifique

EXERCICE 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à deux. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note $id_{\mathcal{E}}$ l'application identique de $\mathcal{E}$ dans lui-même.
Lorsque x et y sont deux vecteurs de $\mathcal{E}$, le produit scalaire de x par y s'écrit $\langle x, y\rangle$, et $\|x\|$ représente la norme de x.
Quand u est un vecteur *non nul* de $\mathcal{E}$, on définit l'application φ_u de $\mathcal{E}$ dans lui-même par :

$$\forall x \in \mathcal{E} \qquad \varphi_u(x) = 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\, u - x$$

1. Montrer que φ_u est un endomorphisme involutif de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel que $\varphi_u \circ \varphi_u = id_{\mathcal{E}}$).

2. Démontrer que u est un vecteur propre de φ_u, associé à une valeur propre que l'on précisera.

3. Établir que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathcal{E}^2 \qquad \langle \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$$

   En déduire que φ_u conserve la norme, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathcal{E} \qquad \|\varphi_u(x)\| = \|x\|$$

4. On désigne par $\mathcal{D}_u$ la droite vectorielle de base u, et par $\mathcal{H}_u$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ orthogonaux à u (autrement dit, $\mathcal{H}_u = \mathcal{D}_u^{\perp}$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_u$).

   a. Montrer que $\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour φ_u.

   b. φ_u est-il diagonalisable ?

   c. t étant un réel non nul, comparer les applications φ_u et φ_{tu}.

5. *Étude d'une réciproque*

   On suppose que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de $\mathcal{E}$ vérifiant :

$$\forall y \in \Delta \qquad \psi(y) = y \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \Delta^{\perp} \qquad \psi(z) = -z$$

   a. Montrer que ψ est involutif et conserve le produit scalaire.

   b. Établir qu'il existe au moins un vecteur u non nul de Δ tel que l'on ait :

$$\psi = \varphi_u$$

   c. Soit $\mathcal{M}$ la matrice de ψ dans une base orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathcal{E}$. Soit a_{ij} (où i et j désignent des entiers compris entre 1 et n) le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne de la matrice ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M}$. Montrer que :

$$a_{ij} = \langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle$$

   En déduire que : ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_n$ où I_n désigne la matrice unité d'ordre n.

EXERCICE 2

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \qquad f(x) = x^x$$

et la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^n}$$

a. Montrer que l'intégrale :

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx$$

converge (ici, on ne demande pas de la calculer).

b. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

2. Soit trois entiers naturels n, p et k ; on pose :

$$J_n = \int_0^1 (x \ln x)^n\, dx \qquad \text{et} \qquad K_{p,k} = \int_0^1 x^p (\ln x)^k\, dx$$

a. Montrer que J_n et $K_{p,k}$ existent (on distinguera les cas $p = 0$ et $p \neq 0$).

b. Pour k différent de zéro, déterminer une relation entre $K_{p,k}$ et $K_{p,k-1}$.

c. En déduire la valeur de J_n en fonction de n.

3. *Calcul de I*

a. Donner, sur $]0, 1]$, un majorant de la fonction qui à x associe $|x \ln x|$.

b. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à deux :

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} J_k \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{e^{n+1}}$$

(On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle)

c. En déduire que :

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$$

d. Calculer avec une précision d'au moins 2×10^{-7} une valeur approchée de I.

3. PROBLÈME

Le but de ce problème (dont *les trois parties sont indépendantes*) est l'étude du temps passé dans une mairie par un usager quand un ou plusieurs guichets sont à la disposition du public, et que plusieurs personnes se présentent en même temps.
On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités de probabilités respectives f et g, $X + Y$ admet pour densité de probabilité la fonction h définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)\, dx$$

À moins d'une mention explicite du contraire dans l'énoncé, X étant une variable aléatoire à densité, on désignera par F_X sa fonction de répartition, et par f_X une fonction densité de probabilité de X.

3.1. Étude de deux guichets

Dans cette partie, il y a deux guichets à la disposition du public. Trois personnes A_1, A_2 et A_3 entrent en même temps dans la salle. À l'instant $t = 0$, A_1 et A_2 s'adressent simultanément aux deux guichets. A_3 attend et s'adressera au premier guichet libéré, soit par A_1, soit par A_2.
On suppose que :

- la durée de passage au guichet de A_i ($i = 1$, 2 ou 3) est une variable aléatoire X_i qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$;
- les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes ;
- la durée du changement de personne à chaque guichet peut être considérée comme nulle.

3.1.1. Étude d'un événement

On se propose de calculer la probabilité de l'événement E :"A_3 quitte la mairie en dernier".

1. Montrer que la variable X_2' définie par $X_2' = -X_2$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 0]$.

2. On admet l'indépendance de X_1 et X_2'.
   Calculer une densité de probabilité φ_1 de la variable Y_1 définie par : $Y_1 = X_1 - X_2$.
   On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
   En déduire Φ_1, fonction de répartition de Y_1.

3. Calculer la fonction de répartition, Φ_2, de la variable Z_1 définie par $Z_1 = |Y_1|$. En déduire une densité de probabilité, φ_2, de Z_1.

4. On admet l'indépendance de Z_1 et $-X_3$.

   a. Calculer une densité de probabilité, φ_3, de la variable $Z_1 - X_3$. On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

   b. En déduire la probabilité de l'événement $\{Z_1 - X_3 \leqslant 0\}$.
   Quelle est la probabilité de E ?

3.1.2. Étude d'une variable aléatoire

On pose :

$$T_3 = \inf(X_1, X_2) + X_3$$

1. Que représente T_3 pour A_3 ?

2. Calculer la fonction de répartition, F, de $\inf(X_1, X_2)$.
   En déduire une densité de probabilité, f, de cette variable aléatoire. Que remarque-t-on ?

3. Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 2t - t^2 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (t-2)^2 & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leqslant t \end{cases}$$

est une densité de probabilité de T_3.
En déduire l'espérance mathématique et la variance de T_3.

3.2. Étude de n guichets

Dans cette partie, n guichets sont ouverts au public.
n personnes A_1, A_2, ..., A_n se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$ et s'adressent à l'un des guichets (les n guichets sont donc tous occupés à l'instant $t = 0$).
On suppose que :

- la durée de passage au guichet de A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est une variable aléatoire X_i qui suit la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné ;
- les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes.

1. On désigne par U_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la première*, terminé sa démarche administrative.
Déterminer la loi de U_n. Quelle loi reconnaît-on ? Donner son espérance mathématique et sa variance.

2. On note V_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la dernière*, terminé sa démarche administrative.
Déterminer la fonction de répartition de V_n. En déduire une de ses densités de probabilité, et montrer que son espérance mathématique est donnée par :

$$E(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^{k+1}$$

3. Soit t un réel strictement positif. On désigne par W_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant terminé leur démarche administrative à l'instant t.
Donner la loi de W_t ainsi que son espérance mathématique.

3.3. Étude d'un guichet

Dans cette partie, un seul guichet est ouvert au public.
Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, on se donne une suite N, X_1, X_2, ..., X_n, ... de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que les variables X_i $(i \in \mathbb{N}^*)$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné, et que N suit la loi géométrique de paramètre p (où p désigne un élément de l'intervalle $]0, 1[$).
N personnes A_1, A_2, ..., A_N se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$, et font donc la queue, dans cet ordre, devant ce guichet.

On suppose que, pour tout entier naturel i non nul, la durée de passage au guichet de A_i est donnée par la variable aléatoire X_i. On pose :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

ce qui signifie que :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

Par exemple :

- Si $N(\omega) = 2$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$
- Si $N(\omega) = 4$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega) + X_4(\omega)$

Ainsi, S, qui est la somme d'un nombre aléatoire de variables X_i, apparaît comme étant le temps total passé à la mairie par la personne qui termine en dernier sa démarche administrative.

1. Soit n un entier naturel non nul fixé. Rappeler la formule donnant une densité de probabilité de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

2. Soit x un réel strictement positif. Exprimer, à l'aide d'une intégrale dont le calcul explicite (bien que possible) n'est pas demandé, la probabilité que l'événement $\{S \leqslant x\}$ soit réalisé sachant que l'événement $\{N = n\}$ l'est.

   a. En déduire la fonction de répartition de S (on admettra qu'il est possible de permuter les deux symboles $\sum_{n=1}^{+\infty}$ et $\int_0^x$ que l'on rencontrera au cours du calcul). Donner une densité de probabilité de S.
   Reconnaître la loi de S.

   b. Montrer que :
   $$E(S) = E(X_i)E(N)$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail